第 2 节 直线与圆的位置关系（★★）

内容提要

1．判断直线$l:Ax+By+C=0$与圆$C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的位置关系的步骤：

①计算圆心$C(a,b)$到直线l的距离d；

②将 d 和 r 进行比较：若$d>r$，则直线和圆相离，它们没有交点，如图 1；若$d=r$，则直线和圆相切，它们有 1 个交点，如图 2；若$d<r$，则直线和圆相交，它们有 2 个交点，如图 3.

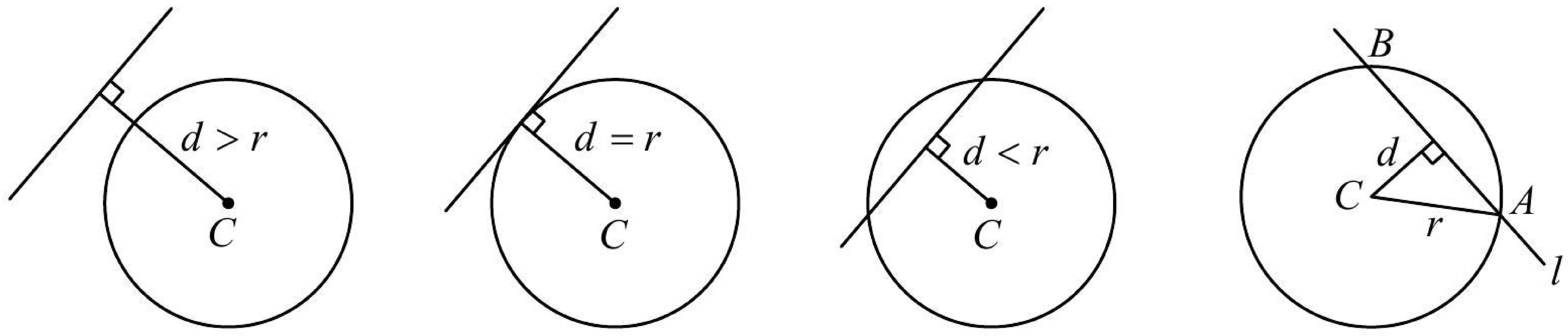


图1　　图2　　图3　　图4

2．当直线与圆相交时，如上图 4，两个交点之间的线段长度，称为直线被圆截得的弦长，计算的步骤是：①计算圆心 C 到直线 l 的距离 d；②弦长$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$.

典型例题

类型Ⅰ：判断直线与圆的位置关系

【例 1】直线$y=x+6$与圆$x^2+y^2-2y-4=0$的位置关系是（　　）

（A）相离　（B）相切　（C）相交且过圆心　（D）相交且不过圆心

解析：判断直线与圆的位置关系，只需计算圆心到直线的距离，并与半径比较，

$y=x+6\Rightarrow x-y+6=0$，$x^2+y^2-2y-4=0\Rightarrow x^2+(y-1)^2=5$，

圆心$(0,1)$到直线$x-y+6=0$的距离$d=\dfrac{|-1+6|}{\sqrt{2}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}>\sqrt{5}$，所以直线与圆相离.

答案：A

【变式 1】对任意的实数 k，直线$l:kx-y-4k+3=0$与圆$C:x^2+y^2-6x-8y+21=0$的位置关系是（　　）

（A）相交　（B）相切　（C）相离　（D）与 k 有关

解析：直线 l 含参，先看它是否过定点，$kx-y-4k+3=0\Rightarrow k(x-4)-(y-3)=0\Rightarrow l$过定点$P(4,3)$，

注意到$4^2+3^2-6\times4-8\times3+21=-2<0$，所以点 P 在圆 C 内部，故 l 与圆 C 始终相交.

答案：A

【反思】判定含参直线与圆的位置关系，除了直接比较 d 与 r 外，往往还可以通过判断直线是否过定点来得出结论.

【变式 2】（2021·新高考Ⅱ卷）（多选）已知直线$l:ax+by-r^2=0$与圆$C:x^2+y^2=r^2$，点$A(a,b)$，则下列说法正确的是（　　）

（A）若点 A 在圆 C 上，则直线 l 与圆 C 相切

（B）若点 A 在圆 C 内，则直线 l 与圆 C 相离

（C）若点 A 在圆 C 外，则直线 l 与圆 C 相离

（D）若点 A 在直线 l 上，则直线 l 与圆 C 相切

解析： 直线 l 不过定点，故只能比较 d 和 r，先把 d 算出来，由题意，$d=\dfrac{|-r^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ①，

A 项，点 A 在圆 C 上 $\Rightarrow a^2+b^2=r^2$，代入①得 $d=\dfrac{r^2}{\sqrt{r^2}}=r\Rightarrow l$ 与圆 C 相切，故 A 项正确；

B 项，点 A 在圆 C 内 $\Rightarrow a^2+b^2<r^2$，结合①得 $d>\dfrac{r^2}{\sqrt{r^2}}=r\Rightarrow l$ 与圆 C 相离，故 B 项正确；

C 项，点 A 在圆 C 外 $\Rightarrow a^2+b^2>r^2$，结合①得 $d<\dfrac{r^2}{\sqrt{r^2}}=r\Rightarrow l$ 与圆 C 相交，故 C 项错误；

D 项，点 A 在 l 上 $\Rightarrow a^2+b^2-r^2=0\Rightarrow a^2+b^2=r^2$，代入①得 $d=\dfrac{r^2}{\sqrt{r^2}}=r\Rightarrow l$ 与圆 C 相切，故 D 项正确.

答案： ABD

类型Ⅱ：用垂径定理计算弦的方程

【例 2】若圆 $C:x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 的弦 MN 的中点为 $A(2,-3)$，则直线 MN 的方程是（　　）

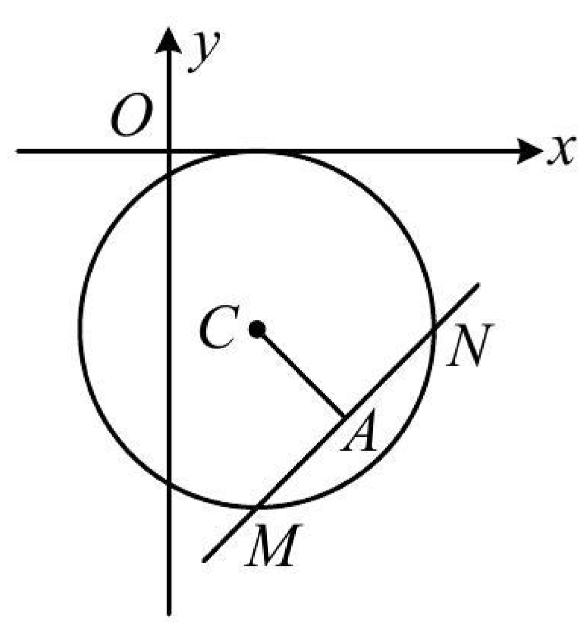
（A）$2x-y-7=0$　（B）$x-y-5=0$　（C）$x+y+1=0$　（D）$x-2y-8=0$

解析： $x^2+y^2-2x+4y+1=0\Rightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=4\Rightarrow$ 圆心为 $C(1,-2)$，

在圆中涉及弦中点，想到垂径定理，如图，A 为弦 MN 的中点，所以 $AC\perp MN$，

因为 $k_{AC}=\dfrac{-3-(-2)}{2-1}=-1$，所以 $k_{MN}=1$，故直线 MN 方程是 $y-(-3)=x-2$，整理得：$x-y-5=0$.

答案： B



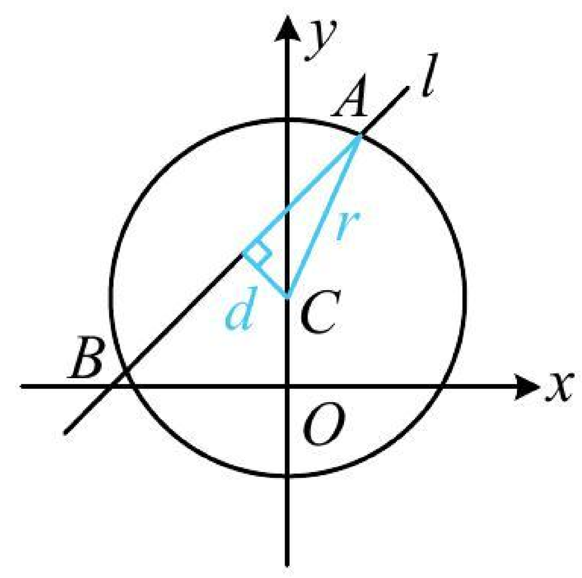
类型Ⅲ：直线被圆截得的弦长

【例 3】直线 $l:x-y+2=0$ 被圆 $C:x^2+(y-1)^2=4$ 截得的弦长为_____.

解析： 涉及圆的弦长，一般在如图所示的蓝色直角三角形中由勾股定理来算，下面先求 d，

圆心 $C(0,1)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|-1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以弦长 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\dfrac{1}{2}}=\sqrt{14}$.

答案： $\sqrt{14}$

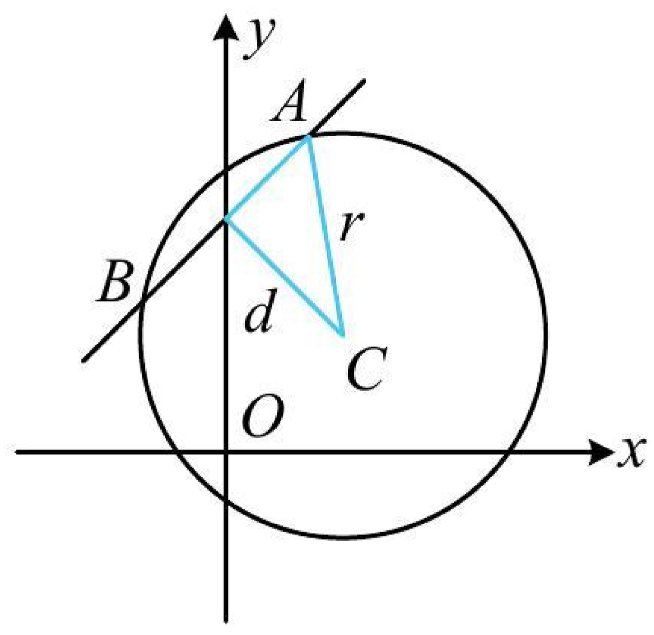


【变式】（2022·天津卷）若直线 $x-y+m=0(m>0)$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=3$ 相交所得的弦长为 m，则 $m=$ _____.

解析：涉及圆的弦长，先算 d，如图，圆心为 $C(1,1)$，半径 $r=\sqrt{3}$，$d=\dfrac{|1-1+m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}$，

所以直线与圆相交所得弦长 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3-\dfrac{m^2}{2}}$，由题意，$2\sqrt{3-\dfrac{m^2}{2}}=m$，解得：$m=2$.

答案：2



【反思】从例 3 和它的变式可以看出，求弦长基本都会转化到点到直线的距离 d 上来.

类型Ⅳ：由直线与圆的位置关系求参

【例 4】已知直线 $l:3x-4y+\sqrt{m}=0$ 与圆 $O:x^2+y^2=4$ 相切，则实数 $m=$ _____.

解析：已知直线与圆的位置关系，可翻译成圆心到直线的距离与半径的大小关系，

由题意，圆 O 的半径为 2，圆心 $O(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|\sqrt{m}|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$，所以 $\sqrt{m}=10$，故 $m=100$.

答案：100

【变式 1】若直线 $l:x-y+m=0$ 与圆 $O:x^2+y^2=1$ 相交，则实数 m 的取值范围是_____.

解析：已知直线与圆的位置关系，可翻译成圆心到直线的距离与半径的大小关系，

由题意，圆 O 的半径为 1，圆心 $O(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<1$，解得：$-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$.

答案：$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

【变式 2】直线 $l:y=kx+1-2k$ 与函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的图象有 2 个公共点，则 k 的取值范围为（　　）

（A）$k>\frac{1}{3}$　（B）$0<k<3$　（C）$0<k\le\frac{1}{3}$　（D）$-3\le k<0$

解析：所给函数带根号，先通过平方去根号，$y=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x^2+y^2=1(y\ge 0)$，

$y=kx+1-2k\Rightarrow y=k(x-2)+1\Rightarrow$ 直线 l 过定点 $P(2,1)$，要分析交点情况，可画图找临界状态，

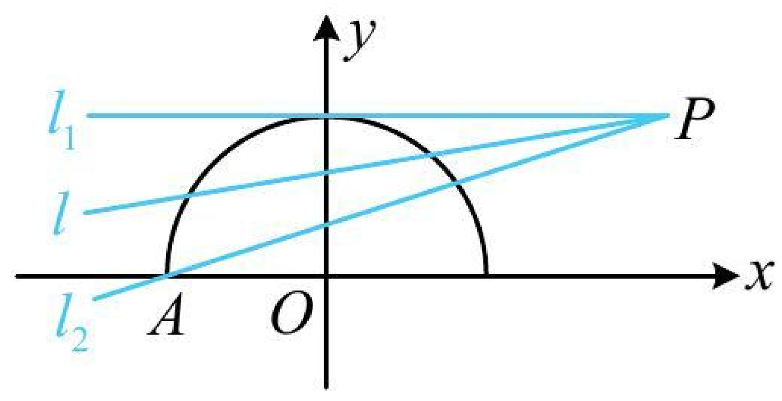
如图，当直线 l 从 l_1（不可取）绕点 P 逆时针旋转至 l_2（可取）的过程中，能与半圆有 2 个交点，

下面求解临界状态，l_1 与半圆相切，结合图形可知其斜率 $k_1=0$；

l_2 经过 P 和 $A(-1,0)$，其斜率 $k_2=\frac{0-1}{-1-2}=\frac{1}{3}$；

直线 l 在旋转过程中不经过竖直线，故其斜率 k 的变化范围是 $(0,\frac{1}{3}]$.

答案：C



【反思】①解析几何中出现根式，可尝试通过平方变形成圆、椭圆等二次曲线，由于根号的范围限制，曲线往往只能取一半；②另外，若题目改为方程 $kx+1-2k=\sqrt{1-x^2}$ 有 2 个实数根，求 k 的范围，也可以数形结合，转化为本题的公共点问题.

强化训练

1．（2023・全国模拟・★）直线 $x+2y+3=0$ 与圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 的位置关系是（　）

（A）相交　（B）相切　（C）相离　（D）不能确定

2．（2022・浙江温州模拟・★）已知直线 $kx-y+k-1=0$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 有两个不同的交点，则实数 k 的取值范围是（　）

（A）$[-\frac{3}{4},0]$　（B）$(0,\frac{3}{4})$　（C）$[0,\frac{3}{4}]$　（D）$(-\frac{3}{4},0)$

3.（2022 • 陕西西安模拟 • ★★）圆 $C: x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 与直线 $l: y-2tx+2t-1=0(t\in \mathbf{R})$ 的位置关系为（　　）

（A）相切　（B）相离　（C）相交　（D）与 t 有关

4.（2022 •内蒙古呼和浩特模拟 •★★）已知直线 $l: x+3y+5=0$ 与圆 $C: x^2+y^2+2x-4y-20=0$ 相交于 A，B 两点，若该圆的一条直径过弦 AB 的中点，则这条直径所在直线的方程为（　　）

（A）$3x+y+1=0$　（B）$3x-y+3=0$　（C）$3x-y+5=0$　（D）$x+3y-5=0$

5.（2023 • 辽宁模拟 • ★★）已知直线 $l: x-2y+3=0$ 与圆 $C: x^2+y^2-2x-6y+6=0$ 相交于 A，B 两点，则 $|AB|=$（　　）

（A）$\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$　（B）$\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$　（C）$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$　（D）$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

6.（2020 • 天津卷 • ★★）已知直线 $x-\sqrt{3}y+8=0$ 和圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相交于 A，B 两点，若 $|AB|=6$，则 r 的值为_____.

7.（2023 • 河北衡水模拟 • ★★）已知直线 $l: y=3x$ 与圆 $C: x^2+y^2-4y=0$ 相交于 A，B 两点，则 ΔABC 的面积为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　（B）$\dfrac{6}{5}$　（C）$\dfrac{2\sqrt{38}}{5}$　（D）5

8．（★★）设圆$C:x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线 l 过点$(0,3)$且被圆 C 截得的弦长为$2\sqrt{3}$，则 l 的方程为_____.

9．（★★）圆$C:x^2+y^2+2y-3=0$被直线$l:x+y-k=0$分成长度之比为$1:3$的两段圆弧，则实数$k=$_____.

10．（★★★）若关于 x 的方程$x-b=\sqrt{1-x^2}$恰有 1 个实数解，则实数 b 的取值范围是（　　）

（A）$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　（B）$[-1,\sqrt{2}]$　　（C）$(-1,1]\cup\{\sqrt{2}\}$　　（D）$(-1,1]\cup\{-\sqrt{2}\}$